

5.4 Trassierung 1

Titel	V2 – 5-4Trassierung 1
Version	Mai 2011
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Trassierungsaufgaben
Rolle des GTR	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen Zeichnen von Graphen
Methoden Hinweise	Die Lösung ist explizit für Schülerinnen und Schüler geschrieben. Da Trassierungsaufgaben in den Schulbüchern noch keine große Verbreitung gefunden haben, bietet es sich an, diese Lösung den Schülerinnen und Schülern zum Nachlesen auszuhändigen.
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Bei Trassierungsaufgaben geht es um Fragestellungen der folgenden Art: zwei Straßen-Enden sollen miteinander verbunden werden (Abbildung 1).

Dabei soll das neu zu bauende Verbindungsstück (die neue Trasse) ein möglichst komfortables Fahren ermöglichen.

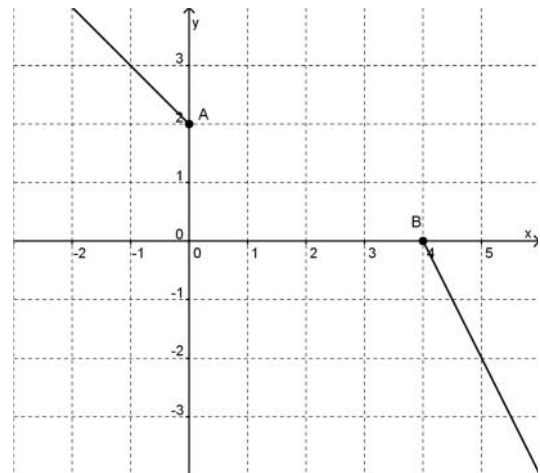


Abbildung 1

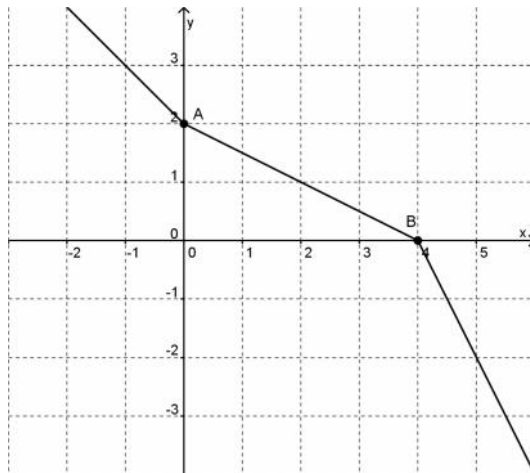


Abbildung 2

Eine direkte Verbindung durch eine *Strecke*, wie in Abbildung 2, ist ungünstig, weil dann durch die beiden Knicke bei den Anschlusspunkten A und B ein zügiges Durchfahren erschwert oder, wie z. B. bei Schienenfahrzeugen, unmöglich gemacht wird.

Gesucht sind also Trassenführungen, die ein angenehmes Fahren ermöglichen.

Hinweis: Das Problem der Trassenführung ist ein wichtiges und reales Problem. Allerdings wird das Problem der Trassenführung im Folgenden in einem ersten und vereinfachenden Ansatz gelöst. Insbesondere wird von einer mathematischen Linie und nicht von einer realen Straße, mit einer gewissen Breite, ausgegangen. Weitere Überlegungen bis zur endgültigen Lösung der realen Problematik müssen und werden folgen.

Im Folgenden soll die Trasse als Graph einer Funktion angesehen werden.

- Übertragen Sie die Abbildung 1 in Ihr GTR und, auch wenn eine Gerade keine sinnvolle Lösung ist, so zeichnen Sie einfach mal zur Übung die Verbindungsstrecke der Anschlusspunkte A und B mit Ihrem Taschencomputer.
Hinweis: Bestimmen Sie dazu den Funktionsterm der Verbindungsstrecke.
- Zeichnen Sie nun Sie die Abbildung 1 in Ihr Heft und skizzieren Sie in die Heftzeichnung eine (auch für Schienenfahrzeuge) befahrbare Trasse. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Ihres Nachbarn – diskutieren Sie miteinander die Vorteile – bzw. Probleme Ihrer Trassenführungen.
- Suchen Sie eine Funktion, sodass deren Graph die beiden gegebenen Straßenenden knickfrei verbindet.

a.	<p>Zum Zeichnen sind die Funktionsterme der Geradenstücke notwendig.</p> <p>Das Geradenstück zum Anschlusspunkt A hat den Funktionsterm $g_1(x) = -x + 2$ mit dem Definitionsbereich $D_{g_1} = [-20; 0]$, wobei die linke Grenze beliebig aber außerhalb des Zeichenbereichs zu setzen ist.</p> <p>Das zweite Geradenstück zum Anschlusspunkt B hat den Funktionsterm $g_2(x) = -2(x - 4)$ mit dem Definitionsbereich $D_{g_2} = [4; 20]$, wobei nun die rechte Grenze beliebig ist.</p>
b.	<p>Hier gibt es individuelle Lösungen. Gemeinsam sollten die Knickfreiheit und eine möglichst kurze Streckenführung sein. Auch kommt nur eine eher geschwungene Lösung in Betracht.</p>
c.	<p>Wie in der Aufgabenstellung gefordert, ist es hilfreich, die Straßenführungen als (Teile von) Funktionsgraphen aufzufassen. Am einfachsten ist es, ganzrationale Funktionen zu wählen. Dabei stellt sich die Frage, welchen Bedingungen eine ganzrationale Funktion f im Sinne der oben geschilderten Problemlage genügen muss.</p> <p>Trivialerweise soll das Kurvenstück die beiden Punkte A und B verbinden. Aus der Abbildung kann man die entsprechenden Werte ablesen:</p> <ul style="list-style-type: none"> I. Das Kurvenstück muss durch den Punkt A gehen, d. h. $f(0) = 2$. II. Das Kurvenstück muss durch den Punkt B gehen: d. h. $f(4) = 0$. <p>Zusätzlich muss die Knickfreiheit gewährleistet werden. Dies kann man durch die Forderung erreichen, dass das einzufügende Kurvenstück an den Anschlusspunkten A und B mit der jeweils gleichen Steigung wie die betreffende Gerade anschließt. Die Steigungen kann man aus der Abbildung ablesen und wurden schon im Aufgabenteil a) benutzt.</p> <ul style="list-style-type: none"> III. Das Kurvenstück muss in A die Steigung -1 haben, d. h. $f'(0) = -1$. IV. Das Kurvenstück muss in B die Steigung -2 haben, d. h. $f'(4) = -2$. <p>Damit hat man vier Bedingungen. Mit vier Bedingungen kann man im Allgemeinen vier Unbekannte bestimmen. Da wir eine ganzrationale Funktion suchen, sind die Unbekannten hier die Koeffizienten der Potenzen von x.</p> <p>Welche ganzrationale Funktion lässt sich damit bestimmen? Nun offensichtlich hat eine ganzrationale Funktion dritten Grades vier Koeffizienten.</p> <p>Unser Ansatz lautet also:</p> $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ <p>Da in den Bedingungen III. und IV. die Ableitung auftritt, muss diese bestimmt werden:</p> $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x^1 + a_1$ <p>Mit diesem Ansatz lassen sich die vier Bedingungen wie folgt formulieren:</p>

Von der mittleren zur lokalen Änderung

$$\text{I. } a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 2$$

$$\text{II. } a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 0$$

$$\text{III. } 3a_3 \cdot 0^2 + 2a_2 \cdot 0^1 + a_1 = -1$$

$$\text{IV. } 3a_3 \cdot 4^2 + 2a_2 \cdot 4^1 + a_1 = -2$$

Diese Bedingungen vereinfachen sich zu:

$$\text{I. } a_0 = 2$$

$$\text{II. } 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 0$$

$$\text{III. } a_1 = -1$$

$$\text{IV. } 48a_3 + 8a_2 + a_1 = -2$$

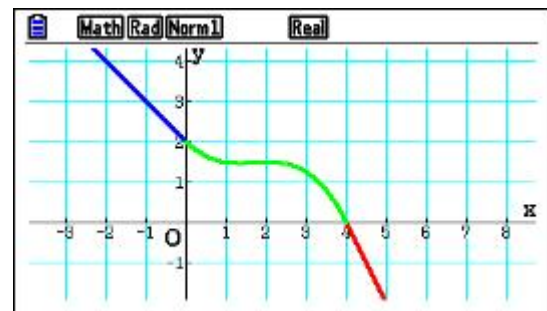
Dieses Gleichungssystem ist mithilfe des Rechners schnell lösbar. Man erhält:

$$a_3 = -\frac{1}{8}, a_2 = \frac{5}{8}, a_1 = -1 \text{ und } a_0 = 2.$$

Damit sind alle Unbekannten bestimmt und man kann die Gleichung der Lösungsfunktion angeben:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{8}x^2 - x + 2$$

In der neben stehenden Abbildung ist der Graph eingezeichnet. Für unsere Fragestellung interessiert lediglich der Kurvenbogen über dem Intervall $[0; 4]$. Man sieht sehr schön, wie alle vier Bedingungen erfüllt sind: Die Kurve verläuft durch A und B, und sie tut dies ohne Knicke!



Hinweis: Einfache Berechnungen der obigen Art sollten Sie prinzipiell auch ohne GTR durchführen können. Allerdings wird mit dem GTR der Blick auf das Wesentliche erleichtert. Ganz entscheidend ist, dass Sie die Bedingungen erkennen und damit ein Gleichungssystem aufstellen können. Diese Arbeit kann Ihnen kein Taschencomputer abnehmen. Der GTR kann dann aber das Gleichungssystem (fehlerfrei) lösen. Eine Lösung könnte folgendermaßen aussehen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 \times 0 & 2 \times 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 \times 4^2 & 2 \times 4 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

